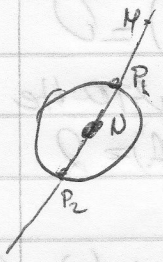
АГ Иванов 11.12.12.



$$\begin{cases} k: F(x_1 x_2 x_3) = 0 \\ \varphi = \lambda M + \mu N \end{cases}$$

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 F(M_0) + \frac{2\lambda}{\mu} F(M_0 N_0) + F(N_0) = 0$$

$D = F^2(M_0 N_0) - F(M_0) F(N_0)$ $\begin{cases} > 0 & 2 \text{ пр. т.} \\ = 0 & 1 \text{ пр. т.} \\ < 0 & 0 \text{ пр.-т.} \end{cases}$

$M_0(x_{02}, x_{02}, x_{03})$ $N(y_1 y_2 y_3)$

1сл) $M_0 \in k \Rightarrow F(M_0) = 0 \Rightarrow F(M_0 N) = 0$

Допирателната $= T(M_0)$

2сл) $M_0 \notin k \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ (овална крива)

$N(x_1 x_2 x_3)$

$F^2(M_0 N) - F(M_0) F(N) = 0$ (без $F^2(N_0)$ защото N_0 е фиксирана $\Rightarrow F^2(N_0) = 0$)

$$(y_1 F_1(M_0) + y_2 F_2(M_0) + y_3 F_3(M_0))^2 - M_0 = 0$$

$$M_0 = (x_{01}^2 + x_{02}^2 - x_{03}^2)(y_1^2 + y_2^2 - y_3^2) = 0$$

крива от II-ра степен над

$F_1(M_0) = x_{01}$, $F_2(M_0) = x_{02}$, $F_3(M_0) = -x_{03}$ $\Rightarrow$

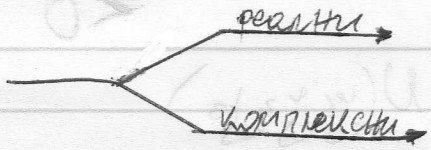
$$(x_{01} y_1 + y_2 x_{02} - y_3 x_{03}) - (x_{01}^2 + x_{02}^2 - x_{03}^2)(y_1^2 + y_2^2 - y_3^2) = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} x_{01}^2 - F(M_0) & x_{01} x_{02} & -x_{01} x_{03} \\ x_{01} x_{02} & x_{02}^2 - F(M_0) & -x_{02} x_{03} \\ -x_{01} x_{03} & -x_{02} x_{03} & x_{03}^2 + F(M_0) \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -x_{02}^2 + x_{01}^2 & x_{01}x_{02} & -x_{01}x_{03} \\ x_{01}x_{02} & -x_{01}^2 + x_{02}^2 & -x_{02}x_{03} \\ -x_{01}x_{03} & -x_{02}x_{03} & x_{01}^2 + x_{02}^2 \end{pmatrix} \quad \det(A) = 0$$

сред сметата не $\Rightarrow$ $\varepsilon(A) = 2$

от класификацията т.е. $\det(A) = 0$ и $\varepsilon(A) = 2 \Rightarrow$ N са точки от крива с 2 случая (пресичаща се права (реални и комплексни (комплексно спрегнати))



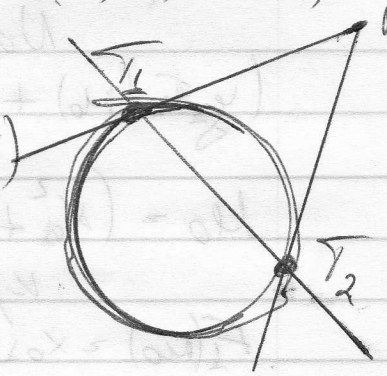
Деф
M се нарича вътрешна ако има 2 допирателни
M се нарича външна ако 2-те допирателни са комплексни

$t_1 = \Pi(t_2)$ { множеството точки полярно спрегнати на Γ_1

Аналогично за $\Gamma_2 \Rightarrow F(\Gamma_1; M) = 0 \Rightarrow F(M; \Gamma_2) = F(\Gamma_2; M) = 0$

$t_2 = \Pi(\Gamma_2) \Rightarrow (M; \Gamma_2) = 0$

$\Gamma_1 \in \Pi(M)$ и $\Gamma_2 \in \Pi(M) \Rightarrow \Pi(M) \equiv (\Gamma_1 \Gamma_2)$



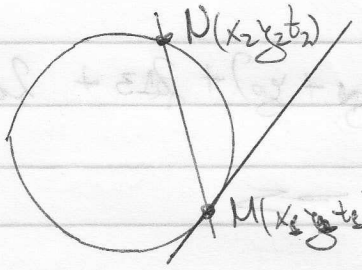
ТВ $M \in K$
Ако $T.M \in \Pi(N) \Rightarrow N \in \Pi(M)$

Т Допираемите точки на 2-те допирателни от M лежат на полярата $\Pi(M)$

Док-во
$M \in \Pi(N) \Rightarrow F(MN) = 0$ (от симетричността) $\Rightarrow F(MN) = 0 \Rightarrow N \in \Pi(M)$

$F(x,y,t) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2 = 0$

за сами $t=1$ директно за да обхване в НХК (нехомогенни координати) $\Rightarrow$



Правата на секуща когато една точка клони към друга точка

уравнението на допирателната Ме фиксирана $\Rightarrow$

Ме $K \begin{cases} M_0(x_0 y_0 t_0) \\ N(x_N y_N t_N) \end{cases}$, N - текуща

полагаме $t=1 \Rightarrow$

$$\overrightarrow{M_0N} = (\underset{B}{x_N - x_0}, \underset{A}{y_N - y_0})$$

$$(y_N - y_0)x_0 - (x_N - x_0)y_0 + c = 0$$

от у-ето на права $Ax + By + C = 0$

$$(-BA) \parallel K \Rightarrow C = (x_N - x_0)y_0 - (y_N - y_0)x_0$$

$$(y_N - y_0)x - (x_N - x_0)y - (y_N - y_0)x_0 + (x_N - x_0)y_0 = 0$$

$$(y_N - y_0)(x - x_0) = (x_N - x_0)(y - y_0)$$

$$y - y_0 = \frac{y_N - y_0}{x_N - x_0}(x - x_0)$$

$F(N) = 0 = a_{11}x_N^2 + 2a_{12}x_N y_N + a_{22}y_N^2 + 2a_{13}y_N + a_{33} = 0$

$F(M) = 0 \Rightarrow a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0 y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{13}y_0 + a_{33} = 0$

$$a_{11}(x_N^2 - x_0) + 2a_{12}(x_N y_N - x_0 y_0) + a_{22}(y_N^2 - y_0^2) + 2a_{13}(x_N - x_0) + 2a_{23}(y_N - y_0) = 0$$

Делим на $(x_N - x_0)$

$$a_{11}(x_N + x_0) + 2a_{12}\frac{x_N y_N - x_0 y_0}{x_N - x_0} + a_{22}\frac{y_N - y_0}{x_N - x_0}(y_N + y_0) + 2a_{13} + 2a_{23}\frac{y_N - y_0}{x_N - x_0} = 0$$

Разглеждаме $\frac{x_N y_N - x_0 y_0}{x_N - x_0} \Rightarrow$

прибавяме $+ - x_0 y_N \Rightarrow$

$$\frac{x_N y_N - x_0 y_N + x_0 y_N - x_0 y_0}{x_N - x_0} =$$

$$\frac{y_N(x_N - x_0) + x_0(y_N - y_0)}{x_N - x_0} = y_N + \frac{y_N - y_0}{x_N - x_0} x_0 \Rightarrow$$

следователно y-ето става

$$a_{11}(x_N - x_0) + 2a_{12}\left(y_N + \frac{y_N - y_0}{x_N - x_0} x_0\right) + a_{22}\frac{y_N - y_0}{x_N - x_0}(y_N + y_0) +$$

$$+ 2a_{13} + 2a_{23}\frac{y_N - y_0}{x_N - x_0} \Rightarrow$$ граничната му е

$$\lim_{x_N \to x_0} \frac{y_N - y_0}{x_N - x_0} = -\frac{F_1(M_0)}{F_2(M_0)}$$

Заместваме в уравнението $\Rightarrow$

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{F_1(M_0)}{F_2(M_0)}(x - x_0)}$$!!!

$$\Pi(M_0) = F_1(M_0)x_0 + F_2(M_0)y_0 + F_3(M_0)$$

$$F_1(M_0)x + F_2(M_0)y - \underbrace{F_1(M_0)x_0 - F_2(M_0)y_0}_{F_3(M_0) \text{ по Ойлер}} = 0 \Rightarrow$$

$$F_1(M_0)x_0 + F_2(M_0)y_0 + F_3(M_0)t_0 = F(M_0) \; M \in K$$

! 5 ЛНЗ-ни условия определят еднозначно крива от втора степен
4 точки не трябва да лежат на 1 права

Т

Крива от втора степен определяме еднозначно от 5 точки в общо положение, тоест никои 4 са колинеарни

Док-во
Нека A, B, C, E, D са точки
A(1,0,0); B(0,1,0); C(0,0,1); E(1,1,1); D - свободна точка

Ако $A \in K \Rightarrow a_{11} = 0$
$B \in K \Rightarrow a_{22} = 0$
$C \in K \Rightarrow a_{33} = 0$
$E \in K \Rightarrow a_{12} + a_{13} + a_{23} = 0 \Rightarrow a_{12} = -a_{13} - a_{23}$

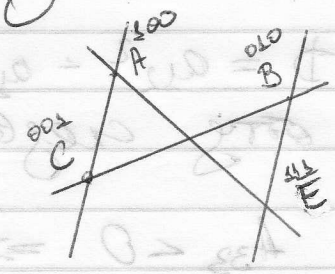
$K: a_{12}xy + a_{13}x - a_{23}y = 0$
заместваме $a_{12} = -a_{13} - a_{23} \Rightarrow$

$K: (a_{13} + a_{23})xy - a_{13}x - a_{23}y = 0$

$a_{13}(xy - x) + a_{23}(xy - y) = 0$

$K: \underbrace{a_{13}x(y-1)}_{x=0, y=1} + \underbrace{a_{23}y(x-1)}_{x=1, y=0} = 0$

заместваме 1 с t $\Rightarrow$
$a_{13}x(y-t) + a_{23}y(x-t)$ за $\forall k$
$D(x_0 y_0 t_0) \in K \Rightarrow$



! $a_{13}x_D(y_D - t_D) + a_{23}y_D(x_D - t_D) = 0$

Вторият има нетривиално решение

$a_{13} \neq a_{23} \neq 0$ Сметаме

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a_{13}-a_{23} & a_{13} \\ -a_{12}-a_{23} & 0 & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = -2a_{23}(a_{13}+a_{23})a_{13}$$ /3 случая

1сл) $a_{13} = 0 \Rightarrow y_D(x_D - t_D) = 0$ – 3 колинеарни точки

2сл) $a_{23} = 0 \Rightarrow x_D(y_D - t_D) = 0$ – 3 колинеарни точки

3сл) $a_{13} + a_{23} = 0 \Rightarrow x_D(y_D - t_D) = y_D(x_D - t_D) = 0$ т.е.

$x_D y_D - y_D t_D = t_D(x_D - y_D) = 0$ – 3 колинеарни точки

при $t_D \neq 0 \Rightarrow x_D \; y_D \to E(111); C(001)$

точките в които $x = y$

Кривата е изродена $\Leftrightarrow$ има 3 колинеарни точки

Афинна класификация и афинни свойства

Безкрайни точки на крива от втора степен

$$u = \begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{13}xt + 2a_{23}yt + a_{33}t^2 + a_{12}xy = 0 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0$$

$D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -A_{33}$ (адюнгирани количества)

оттук следват 3 случая

1) $A_{33} < 0 \Rightarrow$ 2 безкрайни точки

хиперболичен тип

2) $A_{33} = 0 \Rightarrow$ 1 безкрайна точка

параболичен тип

3) $A_{33} > 0 \Rightarrow$ няма безкрайни точки

елиптичен тип

Всяка крива от втора степен е едно от тези три случая

Център и централно уравнение на крива от втора степен

Деф

т. C се нарича център на крива от втора степен ако е полюс на безкрайната права (полярата на $\Pi(C) = \{t=0\}$ е безкрайната права)

$C(x_0 y_0 t_0)$

$\Pi(C) = F_1(C)x_0 + F_2(C)y_0 + F_3(C)t_0 = 0$

от $\Pi(C) = \{t=0\} \Rightarrow$

$F_1(C) = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}t_0 = 0$

$F_2(C) = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}t_0 = 0$

при C крайни т.е. $(t_0 = 1) \Rightarrow$

$F_1(C) = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0$

$F_2(C) = a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0$

1 сл $A_{33} \neq 0$ — дадено 1 решение

2сл) $A_{33}=0$ - има решения $\Leftrightarrow$

$\mathcal{E}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}=1$ ранга да е 1 $\Rightarrow$ $\det(A)=0$

имаме $A_{33}=0$, $\det(A)=0$

имали крайн център

$A_{33}=0 \Rightarrow a_{11}=\lambda a_{12}$

$a_{12}=\lambda a_{22}$

$\begin{pmatrix} \lambda a_{12} & a_{12} \\ \lambda a_{22} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow$

$a_{12}a_{13}=\mu(a_{12}a_{23})$

ТВ:

Параболичните криви имат крайни центрове само при изродено ($\det(A)=0$)